

Rappel

Formules "piégues":
 $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k (x - x_0)^k$

$$\rightarrow r = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

Note: ces formules sont correctes

Exemple 8.20 (iv): $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2 4^k} (x+2)^{2k}$

⚠ FAUX: $r = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{k^2 4^k} \cdot (k+1)^2 4^{k+1} = \lim_{k \rightarrow \infty} 4 \frac{(k+1)^2}{k} = 4$

JUSTE: $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{|x+2|}{(k+1)^2 4^{k+1}}}{\frac{|x+2|^{2k}}{k^2 4^k}} = \lim_{k \rightarrow \infty} |x+2|^2 \frac{1}{4} \frac{(k+1)^2}{k^2} = \frac{1}{4} |x+2|^2$



$$\frac{1}{4} |x+2|^2 < 1 \Leftrightarrow |x+2|^2 < 4 \Leftrightarrow |x+2| < 2 \Rightarrow r = 2$$

Pourquoi c'est faux ?

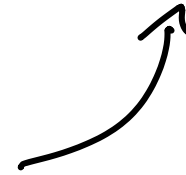
$$(x+2)^{2h}$$

$$(x-x_0)^h$$

$$\sum_{h=0}^{+\infty} a_h (x-x_0)^h$$

$$\sum_{h=0}^{+\infty} b_h (x-x_0)^{2h} = \sum_{h=0}^{+\infty} a_h (x-x_0)^h$$

$$a_h = \begin{cases} b_{h/2} & \text{si } h \text{ pair} \\ 0 & \text{si } h \text{ impair} \end{cases}$$



BONNES FORMULES:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k (x - x_0)^{m \cdot k} \rightarrow r = \sqrt[m]{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}} = \sqrt[m]{\frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}}$$

dans
notre
exemple,
 $m=2$,

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2 4^k} (x+2)^{2k} \rightarrow \text{rayon de convergence est } r=2.$$

$$\sqrt[2]{4} = 2$$

Vu que $x_0 = -2$, on sait que la série converge absolument pour

$x \in]x_0 - r, x_0 + r[=]-4, 0[$ et diverge pour $x \notin [-4, 0]$.

reste à voir $x = -4$ et $x = 0$.

$$\boxed{x = -4}$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2 4^k} (-4+2)^{2k} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \cdot \frac{1}{4^k} \underbrace{(-2)^{2k}}_{4^k} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \text{ converge}$$

($\sum \frac{1}{k^\alpha}$, $\alpha = 2 > 1$)

$$\boxed{x=0}$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \cdot \frac{1}{4^k} \underbrace{(0+2)^{2k}}_{4^k} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \quad \text{qui converge.}$$

$\Rightarrow$ L'intervalle de convergence est $[-4, 0]$

Théorème 8.21:

Soit $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (x-x_0)^k$, une série entière de rayon de convergence $r > 0$ $r = +\infty$ est admis

(i) $f \in C^\infty]x_0 - r, x_0 + r[$ $\leftarrow C^\infty(\mathbb{R})$ si $r = +\infty$

(ii) On a que $f'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \underbrace{k a_k (x-x_0)^{k-1}}_{(k+1) a_{k+1} (x-x_0)^k} = \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1) a_{k+1} (x-x_0)^k$

$$\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \dots \right)' = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\dots \right)' \left(a_k (x-x_0)^k \right)'$$

est une série entière avec le même rayon de convergence.

Plus généralement, on a $f^{(n)}:]x_0-r, x_0+r[\rightarrow \mathbb{C}$ est donnée par

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{k!}{(k-n)!} a_k (x-x_0)^{k-n} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(k+n)!}{k!} a_{k+n} (x-x_0)^k.$$

En particulier, $f^{(n)}(x_0) = n! a_n$.

(iii) f est analytique sur $]x_0-r, x_0+r[$.

Remarque 8.22 :

Une série entière est la série de Taylor de f autour de x_0 . Si on écrit la série de Taylor de f autour d'un autre point, les coefficients vont changer.

Chapitre 9 : L'intégrale.

§ 9.1 Primitives

Définition 9.1 (Primitive)

Soit $D \subseteq \mathbb{R}$ un ouvert et $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

$F: D \rightarrow \mathbb{R}$ est une primitive de f si

$$\forall x \in D \quad F'(x) = f(x).$$

On note alors, $F(x) = \int f(x) dx$ ou $F(x) = \int^x f(t) dt$.

$$F(g(x)) \stackrel{?}{=} \int f(g(x)) dx$$

$$F(g(x)) = \int_{\text{?}}^{g(x)} f(t) dt$$



$$\stackrel{?}{=} \int f(g(x)) dg(x) \\ \stackrel{?}{=} \int f(x) dg(x).$$

Remarque 9.2:

Si il existe une primitive $\bar{F}$ de f , il en existe une infinité: $\forall C \in \mathbb{R}$, $\bar{F} + C$ est une autre primitive de f .

Proposition 9.3

Soient D un ouvert, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, et $f, g: D \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions admettant des primitives. Alors,

$$(i) \text{ On a } \int^x (\alpha f(t) + \beta g(t)) dt = \alpha \int^x f(t) dt + \beta \int^x g(t) dt$$

$\hookrightarrow$ Si $F' = f$ & $G' = g$ alors, $\underbrace{\alpha F + \beta G}_{\text{indd}}$ est une primitive
de $\alpha f + \beta g$,
indd.

(ii) Si de plus, g est dérivable et $g(D) \subseteq D$,

$$\int^x f(g(t)) \cdot g'(t) dt = \int^{g(x)} f(t) dt$$

$$(\circ (\phi \circ \psi)' = (\phi' \circ \psi) \cdot \psi')$$

(iii) si de plus, f & g sont dérivables, alors,

$$\int^x f'(t) g(t) dt = f(x) g(x) - \int^x f(t) g'(t) dt$$

$$\left((\phi \cdot \psi)' = \phi \cdot \psi' + \phi' \cdot \psi \right)$$

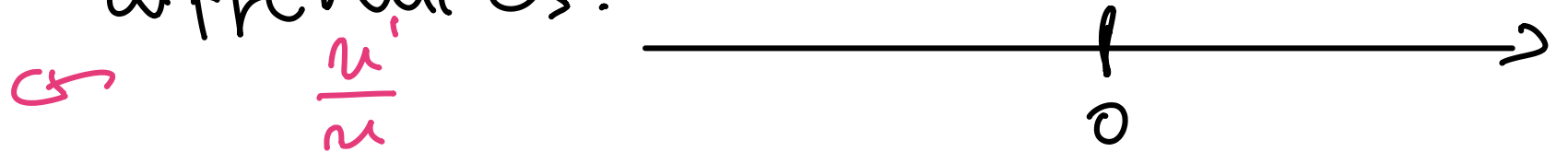
D	$f(x)$	$\int^x f(t)dt$
$\mathbb{R}$	c	cx
$\mathbb{R}$	x^n	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$
$]0, +\infty[$	x^a	$\frac{1}{a+1}x^{a+1}$
$\mathbb{R}^*$	$\frac{1}{x}$	$\log(x)$
$\mathbb{R}$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x)$
$\mathbb{R}$	$\sin(x)$	$-\cos(x)$
$\mathbb{R}$	$\cos(x)$	$\sin(x)$
$] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} [$	$\tan(x)$	$-\log(\cos(x))$
$\mathbb{R}$	e^x	e^x
$\mathbb{R}$	$\cosh(x)$	$\sinh(x)$
$\mathbb{R}$	$\sinh(x)$	$\cosh(x)$
$]0, +\infty[$	$\log(x)$	$x \log(x) - x$

$$x \in \mathbb{R}^*, \quad \int \frac{1}{x} \log(|x|) + C$$

$$x \in \mathbb{R}^*$$

$$\int^x \frac{1}{t} dt = \begin{cases} \log(x) + C_1 & \text{si } x > 0 \\ \log(-x) + C_2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

C_1 & C_2 peuvent être des constantes différentes.



IPF

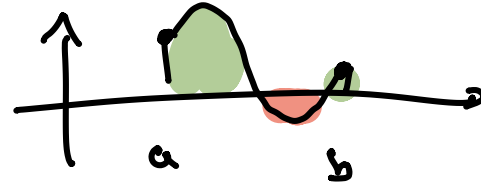
Remarque 9.5

Pour retrouver toutes les primitives, il faut ajouter une constante par intervalle qui constitue le domaine

§ 9.2 L'intégrale de Riemann

"Définition 9.6 - 9.8": L'intégrale de Riemann

l'aire sous la courbe! ☺



$$\int_a^b f(x) dx = \text{green} - \text{red}$$

Théorème 9.9:

Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors, f est intégrable.

Proposition 9.10:

Soient $a < c < b$, $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continus, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Alors,

$$(i) \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

(ii) L'intégrale est linéaire:

$$\int_a^b \alpha f(x) + \beta g(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx.$$

(iii) Si $f \leq g$, $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$

(iv) Si $f \geq 0$, et $\int_a^b f(x) dx = 0$, alors, $\forall x \in [a, b]$, $f(x) = 0$.

(v) on a

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

Théorème 9.11 (Thm fondamental du calcul intégral)

Soient $a < b$, $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue.

Alors,

(i) la fonction $F:]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $F(x) = \int_a^x f(t) dt$

est une primitive de f .

(ii) $\forall x_0 \in [a, b]$, la fonction $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$F(x) = \begin{cases} \int_{x_0}^x f(t) dt & \text{si } x > x_0 \\ 0 & \text{si } x = x_0 \\ -\int_x^{x_0} f(t) dt & \text{si } x < x_0 \end{cases}$$

est une primitive de f sur $]a, b[$. De plus, $F'_d(a) = f(a)$
et $F'_g(b) = f(b)$

(iii) Si $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est une primitive de f , on a

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

Exemple 9.12:

Soit $f: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ défini par $f(x) = \sin(x)$.

On a que $F(x) = -\cos(x)$ est une primitive de f et donc,

$$\int_0^{2\pi} f(x) dx = F(2\pi) - F(0) = -\cos(2\pi) - (-\cos(0)) = 0$$

Remarque 9.13

Le théorème 9.11 assure que f continue $\Rightarrow f$ admet une primitive. Néanmoins, il n'existe pas nécessairement de "bonne formule" pour la primitive. Par exemple, $f(x) = e^{-x^2}$, la primitive $\int^x e^{-t^2} dt$ ne peut pas s'écrire comme combinaison ($+$, $-$, $\cdot$, $\div$) de fonctions élémentaires.

fonctions continues



$\forall a, b \in I$

y entre

$f(a)$ et $f(b)$, $\exists c \in]a, b[$

tg $y = f(c)$



f admet
une primitive

f est intégrable

Théorème 9.14 (thm de la moyenne)

Soient $a < b$, $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue, alors, $\exists c \in]a, b[$ tq

$$\int_a^b f(x) dx = f(c)(b-a)$$

(TAF sur une primitive de f)

§ 9.3 Technique de calcul d'intégrales

Notation 9.15:

On écrit $[f(x)]_a^b$ pour $f(b) - f(a)$, de telle sorte que

$$\int_a^b f'(x) dx = [f(x)]_a^b.$$

Théorème 9.16 (Intégration par parties)

Soient $a < b$, $f, g \in \mathcal{C}^1([a, b])$, alors, $\int_a^b f'(x)g(x) dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x) dx$

